ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 133

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 51

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 185

Α4. α) Λ (Αν $x_1 \neq x_2, τότε\ f(x_1) \neq f(x_2)$)

β) Σ (Θεώρημα: Παραγωγισιμότητα συνεπάγεται συνέχεια)

γ) Σ (Ορισμός Κυρτότητας)

δ) Σ (Κανόνας αλυσίδας για την παράγωγο σύνθεσης)

ε) Λ ($(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$)

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{f_0g}=\{x\in A_g/g(x)\in A_f\}=\{x\geq 0/\sqrt{x-2}+1>1\}=\{x\geq 0/\sqrt{x-2}>0\}=$

$\{x\geq 0/x-2>0\}=\{x\geq 0/x>2=(2,+\infty)$

Και $(f^{o}g)(x)=f(g(x))=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)=2ln(\sqrt{x-2})=2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1}{2}\ln(x-2)=$

$\ln(x-2)$.

Β2. Έχουμε $h(x)=\ln(x-2)$, $x\in(2,+\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $h'(x)=\frac{1}{x-2}>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 ,επομένως αντιστρέφεται.

$h(x)=y\Leftrightarrow \ln(x-2)=y\Leftrightarrow x-2=e^{y}\Leftrightarrow x=2+e^{y}, y\in\mathbb{R}$

Επομένως $h^{-1}(x)=e^{x}+2, x\in\mathbb{R}$.

Β3. Για το όριο $\lim\limits_{x\to 2}(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2})$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} \overset{\text{D.L.P}}{=} \lim\limits_{x\to 2}\frac{2ln(x-1)}{x-2} \overset{\text{D.L.P}}{=} \lim\limits_{x\to 2}\frac{2}{x-1}=2$
- $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=\lim\limits_{x\to 2}ln(x-2)=-\infty$

Αφού αν θέσουμε u= x−2 τότε x→ 2 έχουμε $u\to 0^{+}$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}ln(x-2)=\lim\limits_{u\to 0^{+}}lnu=-\infty$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 2}(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}) = -\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l,\ l\in\mathbb{R}$ **(1)**

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\kappa x = \begin{cases}+\infty, \text{ αν } \kappa>0\\ -\infty, \text{ αν } \kappa<0\end{cases}$

Άτοπο λόγω της (1) άρα κ = 0 .

Αφού η y =x εφάπτεται στην C_f στο 0(0,0) ισχύει ότι f(0) = 0 και f '(0) = 1 .

Η παράγωγος της f είναι : $f'(x) = \frac{\mu x^2(x^2+1)-\mu x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2+\mu}{(x^2+1)^2}$

Άρα : f'(0)=1 ⇔ μ=1 .

Γ2. i) Για κ=0 και μ=1 έχουμε: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ και $f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,1]

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=-1 το $f(-1)=-\frac{1}{2}$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=1 το $f(1)=\frac{1}{2}$.

ii) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ άρα

$f(\Delta_1)=[f(-1)\ ,\lim_{x\to-\infty} f(x)) = [-\frac{1}{2},0)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[-1,1]$ άρα: $f(\Delta_2)=[\ f(-1),\ f(1)] = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ άρα: $F(\Delta_3)=(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ f(1)]=(0,\frac{1}{2}]$

Άρα $f(\Delta) =[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

Ισχύει $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\alpha^2\geq0\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\alpha^2\geq\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}+\alpha^2\notin f(\Delta_1)$

Για α=0 έχουμε $\frac{1}{2}+\alpha^2\in f(\Delta_2)$ και f γνησίως αύξουσα άρα υπάρχει μοναδική λύση στο Δ_2.

$\frac{1}{2}+\alpha^2\notin f(\Delta_3)$

Άρα η f έχει μοναδική λύση ,όταν α=0 , την x =1.

Γ3.

$I_\nu+I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^{2\nu+1}$

$dx=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]^1=\frac{1}{2\nu+2}$

Για ν=0 έχουμε $I_o=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}ln2$

Ισχύει $I_\nu+I_{\nu+1}=\frac{1}{2\nu+2}$

Για ν=0 έχουμε $I_o+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{2}-I_o=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ln2$

Για ν = 1 έχουμε $I_1+I_2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln2\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{2}ln2-\frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω σ(x)=g(x)+x συνεχής στο ℝ άρα και στο [-1, 0]

σ(-1) = g(-1) – 1 < 0

σ(0) = g(0) > 0

Είναι $\sigma(-1)\cdot\sigma(0)<0$

Από θεώρημα Boltzano $\exists\, x, \in (-1,0) : \sigma(x_1) = 0$

Είναι σ'(x)= g'(x) + 1 $\neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Επειδή η σ'(x) είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ άρα η σ(x) είναι γν. μονότονη, επομένως το x_1 είναι μοναδική ρίζα της σ(x) στο (-1,0).

Δ2. Η f(x) είναι συνεχής στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[x^2 \cdot (g(x) + x)] = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x] = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ \forall \kappa \epsilon \mathbb{R}$

Η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (g(x) + x) \cdot 0}{x} = \lim_{x\to 0}[x \cdot (g(x) + x)] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{[2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x]}{x} = \lim_{x\to 0} \left(2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa\right) = 2 \cdot 1 + 1 - \kappa$$

$= 3 - \kappa$

Είναι $0 = 3 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ3 i. Για κ = 3 είναι f(x) = $2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$ $\sigma\tau o$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

f '(x) = $2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Βρίσκουμε στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ το πρόσημο του $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1$

Θέτουμε συνx=ω και έχουμε $2\omega^2 - 3\omega + 1$

Ο αριθμός 1 είναι η ρίζα του P(ω) =$2\omega^3 - 3\omega^2 + 1$

2	-3	0	1	
	2	-1	-1	1
2	-1	-1	0	

Άρα P(ω) = (ω-1)· $(2\omega^2 - \omega - 1) = (\omega - 1) \cdot 2 \cdot (\omega - 1) \cdot \left(\omega + \frac{1}{2}\right)$

$= (\omega - 1)^2 \cdot 2 \cdot \left(\omega + \frac{1}{2}\right) = (\omega - 1)^2 \cdot (2\omega + 1),\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu x > 0$

$\acute{\alpha}\rho\alpha\ 0 < \omega < 1.$

Επομένως P(ω) =$(\omega - 1)^2 \cdot (2\omega + 1) > 0\ \forall x \in (0,1)$

Άρα f '(x) > 0 $\forall x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα f(x) ↑ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή f(0) = 0, $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι x≥ 0 $\Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

ii. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή f ↑ στο $\Delta = \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι f (Δ) = [f (0), $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x] = 2\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2} + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

Άρα f(Δ) = [0,+∞)

Επειδή το $\frac{\pi}{3} \in f(\Delta)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει μία τουλάχιστον λύση x_2.

Επειδή f ↑ στο Δ η λύση $x_2 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι μοναδική.

Δ4 i. $\forall x \in (x_1, 0)$ είναι $f(x) = x^2\cdot[g(x)+x] = x^2\cdot\sigma(x)$

Είναι $\sigma(x_1) = 0$ από Δ1. και $\sigma(0) > 0$

Επειδή η $\sigma(x)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(x_1, 0)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[x_1, 0]$ επειδή $\sigma(0) > 0$

Είναι $\sigma(x) \geq 0\ \forall x \in [x_1, 0]$ άρα και $f(x) = x^2\cdot\sigma(x) \geq 0\ \forall x \in [x_1, 0]$

ii. Ο άξονας y'y (x = 0) χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία:

1. Ω_1 από x_1 έως 0, όπου f(x) ≥ 0.

2. Ω_2 από 0 έως $f(x_2)$, όπου f(x) ≥ 0.

Ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Longrightarrow \int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{f(x_2)} f(x)dx$.

Όμως, προσέχουμε την εκφώνηση: Το x_2 είναι ρίζα της $f(x)=\frac{\pi}{3}$, άρα $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$.

- Υπολογισμός του $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)dx = \left[-2\sigma\upsilon x - ln|\sigma\upsilon x| - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-2\sigma\upsilon\frac{\pi}{3} - \ln\left(\sigma\upsilon\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right) - (-2\sigma\upsilon 0 - \ln(\sigma\upsilon 0) - 0)$$

$$= \left(-2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{9}\right) - (-2-0) = -1 + ln2 - \frac{\pi^2}{6} + 2$$

- Υπολογισμός του $\int_{x_1}^{0} f(x)dx$:

$$\int_{x_1}^{0} x^2(g(x)+x)dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}$$

Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το $\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx$:

$$\int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)dx = \left(0 - \frac{x_1^3}{3}g(x_1)\right) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx$$

Από Δ1 γνωρίζουμε ότι $g(x_1) = -x_1$ οπότε:

$$-\frac{x_1^3}{3}(-x_1) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx$$

Εξισώνουμε τα δύο μέλη ($E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$):

$$\frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = ln2 + 1 - \frac{\pi^2}{6}$$

Πολλαπλασιάζουμε όλη τη σχέση με -3:

$$-\frac{x_1^4}{4} + \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = -3ln2 - 3 + \frac{\pi^2}{2}$$